TakiAcademy - www.takiacademy.com ★★★★★★★★★ Mathématiques ★★★★★★★★★ Prof : Abbes Amor – Lycée Pilote Monastir	Section : 4ème Sc-Exp	
	Révision Bac 2019 : Sujet n° 06	
	Durée : 3 H 00 mn	Date : 31/05/2019

EXERCICE N°1 : 4 points

1) On donne les nombres complexes suivants :

$a=\left(1+\sqrt{3}\right)i$; $b=-\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right]$ et $w=2+\left(1-\sqrt{3}\right)i$.

a) Donner la forme algébrique de a^2 et w^2.

b) Vérifier que $w^2=a^2-4b$.

2) On considère les équations suivantes : $(E_1): z^2-az+b=0$ et $(E_2): z^3-2az^2+\left(b+a^2\right)z-ab=0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) (on note z_1 et z_2 les solution de (E_1) tel que $|z_1|<|z_2|$).

b) Vérifier que *a* est une solution de l'équation (E_2).

c) En déduire les solutions de (E_2).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $z_A=1+i$, $z_B=-1+i\sqrt{3}$, *w* et *a* .

a) Donner sous forme exponentielle z_B puis placer *A* et *B*.

b) Vérifier que $z_A-z_B=w$. Construire alors le point *C*.

c) Donner la forme algébrique de $\dfrac{w-z_A}{a-z_A}$. En déduire une *A*, *C* et *D* sont alignés.

d) Construire alors le point *D*.

EXERCICE N°2 : 3 points

Une urne contient : 4 boules blanches numérotées 1, 1, 1, 1. 2 boules noires numérotées 2, 1. et 1 boule rouge numérotée 2.

Une épreuve consiste à tirer successivement 3 boules de l'urne de la manière suivante :

Si la boule tirée porte le n°1 on la remet dans l'urne et on tire la boule suivante.

Si nom on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire la boule suivante.

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Obtenir 3 boules blanches » ; B : « Obtenir exactement 2 boules portant n°1 ».

2) Soit l'aléa numérique X qui prend pour valeur : 0 si aucune boule tirée n'est noire, si non le rang de la 1ère boule noire tirée.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer σ(X) et tracer la fonction de répartition de X.

EXERCICE N°3 : 4 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,-1)$ et $C(0,0,1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x-z+1=0$.

2) On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$ et soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a) Montrer que la droite Δ coupe le plan P en J.

b) Calculer la distance IJ.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Pour $\theta\in[0,2\pi[$, on considère le point $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

a) Vérifier que N est un point de la sphère S.

b) Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$.

d) En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre $ABCN$ est minimal.

EXERCICE N°4 : 4 points

1) Montrer que pour x > 0 , on a : $\frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

a) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n - 1 + \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) \le u_n$.

b) Déduire un encadrement de u_n puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=0$.

3) Montrer que pour $t\ge 0$, on a : $1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1$. Déduire que pour $x\ge 0$, $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$.

4) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{n^n}{n!}$.

a) Montrer que $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

b) Justifier que pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}\le\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\le\frac{1}{k}$.

c) Déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $n-\frac{1}{2}u_n\le\ln(v_{n+1})\le n$. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(v_n)}{n}=1$.

5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)=\frac{\ln(v_n)}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

EXERCICE N°5 : 5 points

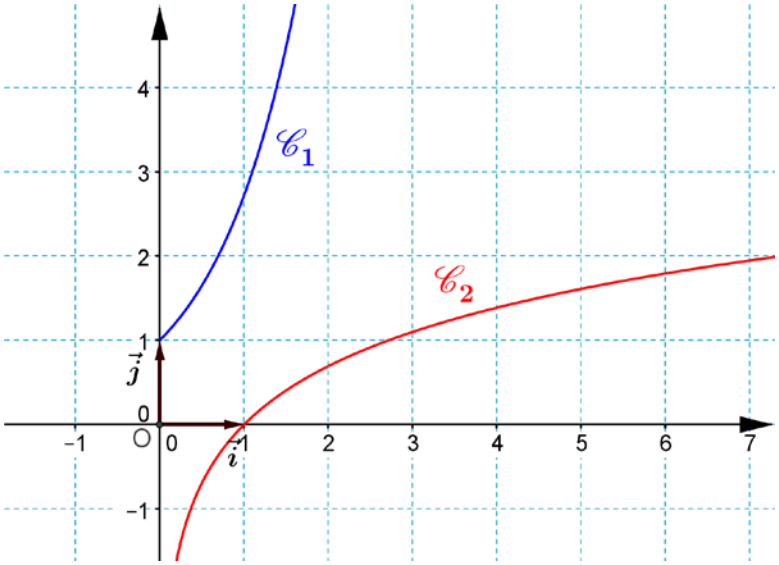
Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^x\sqrt{e^x-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Dans la figure ci-dessous on a représenté $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes respectives des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$.



a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_1$

.

b) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Construire dans le même repère la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction réciproque de f.

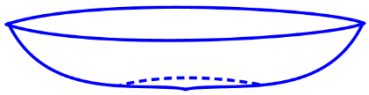
c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_2$ et l'axe des abscisses.

5) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

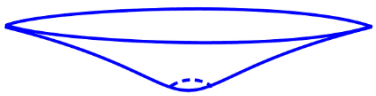
Soit Γ la courbe de la restriction de f à $[0,\ln 2]$.

(S) est la solide de révolution obtenu en faisant tourner Γ autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

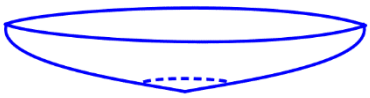
a) Préciser parmi les solides suivants celui qui correspond à (S).



(I)



(II)



(III)

b) Calculer le volume de (S).